



**ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ  
ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2026**

**ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ**

**ΜΑΘΗΜΑ**

**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ο.Π.**

**ΩΡΑ ΑΝΑΡΤΗΣΗΣ**

10:21



**φροντιστήρια  
ΠΟΥΚΑΜΙΣΑΣ**  
Ο ΜΕΓΑΛΥΤΕΡΟΣ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑΚΟΣ ΟΜΙΛΟΣ ΣΤΗΝ ΕΛΛΑΔΑ

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ  
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ – ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ: 3-6-2026

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ο.Π.

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ  
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

**ΘΕΜΑ Α**

A.1. Σχολικό σελίδα 133

Αρκεί να αποδείξουμε ότι για οποιαδήποτε  $x_1, x_2 \in \Delta$  ισχύει  $f(x_1) = f(x_2)$ . Πράγματι:

- Αν  $x_1 = x_2$  τότε προφανώς  $f(x_1) = f(x_2)$ .
- Αν  $x_1 < x_2$ , τότε στο διάστημα  $[x_1, x_2]$  η  $f$  ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμή. Επομένως υπάρχει  $\xi \in (x_1, x_2)$  τέτοιο ώστε  $f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$  ①.

Επειδή το  $\xi$  είναι εσωτερικό σημείο του  $\Delta$ , ισχύει  $f'(\xi) = 0$ , οπότε λόγω της ① είναι  $f(x_1) = f(x_2)$ . Αν  $x_2 < x_1$ , τότε ομοίως αποδεικνύεται ότι  $f(x_1) = f(x_2)$ . Σε όλες λοιπόν τις περιπτώσεις είναι  $f(x_1) = f(x_2)$ .

A.2. Σχολικό σελίδα 51

Έστω οι συναρτήσεις  $f, g, h$ . Αν:

- $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$  κοντά στο  $x_0$  και
- $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l$

τότε  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$

A.3. Σχολικό σελίδα 185

Έστω  $f$  μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα  $\Delta$ . Αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της  $f$  στο  $\Delta$  ονομάζεται κάθε συνάρτηση  $F$  που είναι παραγωγίσιμη στο  $\Delta$  και ισχύει  $F'(x) = f(x)$  για κάθε  $x \in \Delta$ .

A.4. α) Λ    β) Σ    γ) Σ    δ) Σ    ε) Λ

## ΘΕΜΑ Β

$f : (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  με τύπο  $f(x) = 2 \ln(x-1)$

$g : [2, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  με τύπο  $g(x) = \sqrt{x-2} + 1$

**B.1.** Για την συνάρτηση  $h = f \circ g$ .

$$A_{f \circ g} = \{x \in A_g : g(x) \in A_f\} = \{x \geq 2 : \sqrt{x-2} + 1 > 1\} = \{x \geq 2 : \sqrt{x-2} > 0\} = \\ = \{x \geq 2 : x-2 > 0\} = \{x \geq 2 : x > 2\} = (2, +\infty)$$

$$h(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x-2} + 1) = 2 \ln(\sqrt{x-2} + 1 - 1) = \\ = 2 \ln(\sqrt{x-2}) = \ln(\sqrt{x-2})^2 = \ln(x-2)$$

**B.2.**  $h(x) = \ln(x-2)$ ,  $x \in (2, +\infty)$

Για κάθε  $x_1, x_2 \in A_h$  με  $x_1 < x_2$  έχουμε:

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow x_1 - 2 < x_2 - 2 \stackrel{\ln x'}{\Leftrightarrow} \ln(x_1 - 2) < \ln(x_2 - 2) \Leftrightarrow h(x_1) < h(x_2)$$

Άρα  $h \nearrow$  στο διάστημα  $(2, +\infty)$  άρα  $h^{-1}$ .. άρα  $h$  αντιστρέφεται.

β' τρόπος

Για κάθε  $x_1, x_2 \in A_h$  με  $h(x_1) = h(x_2)$  έχουμε:

$$h(x_1) = h(x_2) \Leftrightarrow \ln(x_1 - 2) = \ln(x_2 - 2) \stackrel{\ln x^{-1}-1..}{\Leftrightarrow} x_1 - 2 = x_2 - 2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

Άρα  $h^{-1}$ .. άρα  $h$  αντιστρέφεται.

γ' τρόπος

Η  $h$  είναι συνεχής και παραγωγίσιμη για  $x > 2$  με

$$h'(x) = [\ln(x-2)]' = \frac{1}{x-2} \cdot (x-2)' = \frac{1}{x-2} > 0 \text{ για } x \in (2, +\infty)$$

Άρα  $h \nearrow$  στο διάστημα  $(2, +\infty)$  άρα  $h^{-1}$ .. άρα  $h$  αντιστρέφεται.

Για την εύρεση της αντίστροφης, θέτουμε  $y = h(x)$ .

$$y = h(x) \Leftrightarrow y = \ln(x-2) \stackrel{e^x^{-1}-1..}{\Leftrightarrow} e^y = e^{\ln(x-2)} \Leftrightarrow e^y = x-2 \Leftrightarrow x = e^y + 2, x \in A_h$$

Έχουμε  $x > 2 \Leftrightarrow e^y + 2 > 2 \Leftrightarrow e^y > 0$  που ισχύει για κάθε  $y \in \mathbb{R}$ , άρα  $A_{h^{-1}} = \mathbb{R}$ .

Επομένως  $h^{-1}(y) = e^y + 2$  με  $y \in \mathbb{R}$  άρα  $h^{-1}(x) = e^x + 2$  με  $x \in \mathbb{R}$ .

β' τρόπος

Η  $h$  είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα άρα

$$h((2, +\infty)) = \left( \lim_{x \rightarrow 2^+} h(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) \right) = \left( \lim_{x \rightarrow 2^+} \ln(x-2), \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x-2) \right) = \mathbb{R} \text{ αφού}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} (x-2) = 0 \text{ άρα } \lim_{x \rightarrow 2^+} \ln(x-2) \stackrel{u=x-2}{=} \lim_{x \rightarrow 2^+} \ln u \stackrel{u \rightarrow 0^+}{=} \lim_{u \rightarrow 0^+} \ln u = -\infty \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x-2) = +\infty \text{ άρα } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x-2) \stackrel{v=x-2}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln v \stackrel{v \rightarrow +\infty}{=} \lim_{v \rightarrow +\infty} \ln v = +\infty$$

**B.3.**  $\lim_{x \rightarrow 2} \left( h(x) \cdot \frac{f(x)}{x-2} \right) = \lim_{x \rightarrow 2} \left( \ln(x-2) \cdot \frac{2 \ln(x-1)}{x-2} \right)^{(-\infty)^2} = -\infty$  αφού

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2 \ln(x-1)}{x-2} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(2 \ln(x-1))'}{(x-2)'} \stackrel{DLH}{=} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2 \cdot \frac{1}{x-1} \cdot (x-1)'}{1} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2}{x-1} = 2 \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} (x-2) = 0 \text{ \u03b1\u03c1\u03b1 } \lim_{x \rightarrow 2^+} \ln(x-2) \stackrel{u=x-2}{=} \lim_{x \rightarrow 2^+} \ln u = \lim_{u \rightarrow 0^+} \ln u = -\infty$$

ΦΡΟΝΤΙΣΤ\u0397\u03a1\u0399\u0391  
ΠΟΥΚΑΜ\u0399\u03a3\u0391\u03a3

